Forblad

Spændingsbestemmelser i excentrisk paavirkede Søjler

K.F.W.Askøe

Tidsskrifter

BSM 10-3 Bygningsstatiske Meddelelser

1938

SPÆNDINGSBESTEMMELSE I EXCENTRISK PAAVIRKEDE SØJLER

AF *K. F. W. ASKØE*

Indledning.

I »Ingeniøren« Nr. 56, 1936 er vist, hvorledes Spændingsbestemmelse lettest foregaar i centralt paavirkede Søjler, idet man ud fra Arbejdslinien[1]):

$$E = \begin{cases} E_P \dfrac{\sigma_C - \sigma}{\sigma_C - \sigma_P} & \text{for } \sigma_P < \sigma < \sigma_C \\ E_P & \text{for } 0 < \sigma < \sigma_P \end{cases} \tag{1 a}$$

hvori

E = Elasticitetskoefficienten i et vilkaarligt Punkt,
E_P = — ved Proportionalitetsgrænsen,
σ = Spændingen i et vilkaarligt Punkt,
σ_P = — ved Proportionalitetsgrænsen,
σ_C = — ved Trykflydegrænsen (evt. større end Brudgrænsen).

anførte, og paa en Række Taleksempler viste Anvendelsen af, den almengyldige Søjleformel:

$$\sigma_a \leqq r_E = \begin{cases} r_c \dfrac{1 - \mu (2\eta)^2}{1 + 4\mu (1 - 2\eta)} \text{ for } 0 < \mu < \dfrac{1}{4\eta} \text{ (Engesser)} \\ \dfrac{r_c}{4\mu} \text{ for } \dfrac{1}{4\eta} < \mu < \infty \text{ (Euler)} \end{cases} \tag{2 a}$$

hvori

σ_a = Normalspændingen i Søjlen $= \dfrac{N}{F}$,
r_E = Tilladelig Søjlepaavirkning,
r_c = Tilladelig Trykpaavirkning,
μ = Stivhedsfaktoren $= \dfrac{\varkappa \zeta l^2}{F} = \varkappa \left(\dfrac{l}{i}\right)^2$

og[2])

[1]) Anført af Prof. *P. M. Frandsen* (med lidt andre Betegnelser).
[2]) Yderligere Talværdier i *K. F. W. Askøe*: Planelastiske Tabeller, Aarhus 1936.

$$\eta = \frac{\sigma_P}{\sigma_C} = \begin{cases} 0 \text{ for Støbejærn } \left(\varkappa = \frac{7}{4}\right) \text{ og Jærnbeton } \left(\varkappa = \frac{1}{4}\right), \\ \frac{1}{3} \text{ for Naaletræ } \left(\varkappa = \frac{3}{4}\right) \text{ og Løvtræ } (\varkappa = 1), \\ \frac{1}{2} \text{ for Staal 37 } \left(\varkappa = \frac{1}{3}\right) \text{ og Staal 44 } \left(\varkappa = \frac{2}{5}\right), \\ 1 \text{ for Murværk } \left(\varkappa = \frac{10}{7}\right) \text{ og Grovbeton } \left(\varkappa = \frac{10}{7}\right). \end{cases}$$

medens Resten af Betegnelserne svarer til Husbygnings- og Jærnbeton-normerne.

Arbejdslinien.

Da (1 a), som er fortrinlig egnet til Søjleundersøgelser, giver uendelig stor Bruddeformation, er den mindre egnet til Bjælkeundersøgelser, hvorfor den modificeres til:

$$E = \begin{cases} E_P \cdot \left(\frac{\sigma_C - \sigma}{\sigma_C - \sigma_P}\right)^{\frac{\omega - 1}{\omega}} \text{ for } \sigma_P < \sigma < \sigma_C \\ E_P \qquad\qquad \text{ for } 0 < \sigma < \sigma_P \end{cases} \tag{1 b}$$

hvori

$$\omega = \text{Arbejdsliniens »Brydningsforhold«} = \frac{E_P}{E_{CP}},$$

idet

E_P = Elasticitetskoefficienten for den retlinede Del,
E_{CP} = — for Korden til den krumlinede Del,

eller efter Integration til:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_C - (\sigma_C - \sigma_P)\left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon_p}\right)^{\omega} \text{ for } \sigma_P < \sigma < \sigma_C \\ \sigma_P \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \qquad\qquad \text{ for } 0 < \sigma < \sigma_P \end{cases} \tag{1 c}$$

hvori

ε = Enhedsdeformationen i et vilkaarligt Punkt,
ε_p = — ved Proportionalitetsgrænsen,
ε_c = — ved Trykflydegrænsen (evt. Brudgr.),

idet:

$$\left\{\begin{array}{ll} E = \dfrac{d\sigma}{d\varepsilon} = & \\ \omega \cdot \dfrac{\sigma_C - \sigma_P}{\varepsilon_c - \varepsilon_p}\left(\dfrac{\varepsilon_c - \varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon_p}\right)^{\omega - 1} = \omega \cdot \dfrac{\sigma_C - \sigma}{\varepsilon_c - \varepsilon} = E_P \cdot \left(\dfrac{\sigma_C - \sigma}{\sigma_C - \sigma_P}\right)^{\frac{\omega - 1}{\omega}} & \text{for } \sigma_P < \sigma < \sigma_C \\ \dfrac{\sigma_P}{\varepsilon_p} \qquad\qquad = E_P & \text{for } 0 < \sigma < \sigma_P \end{array}\right\} \quad (1\,\mathrm{d})$$

der tilfredsstilles af ovennævnte Værdier for ω, og er identisk med (1 b).

Centralt Tryk.

Med Sikkerhed n har man til Bestemmelse af Spændinger:

$$\sigma_A = \frac{nN}{F} \leqq \sigma_C \qquad (3\,\mathrm{a})$$

eller efter Division med n:

$$\sigma_a = \frac{N}{F} \leqq r_c \qquad (3\,\mathrm{b})$$

og til Bestemmelse af Deformationer, har man ifølge (1 d):

$$E_A = \left\{\begin{array}{l} \omega \cdot \dfrac{\sigma_C - \sigma_A}{\varepsilon_c - \varepsilon_A} \text{ for } \sigma_P < \sigma_A < \sigma_C \\ \dfrac{\sigma_P}{\varepsilon_p} = E_P \text{ for } 0 < \sigma_A < \sigma_P \end{array}\right\} \qquad (1\,\mathrm{e})$$

Excentrisk Tryk.

For et Rektangel, hvori Spændingen varierer fra σ i Indersiden til σ_C i Ydersiden, har man som bekendt:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{nN}{F} = \dfrac{\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_c} \sigma\, d\varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon} \\ \dfrac{nM}{W} = \dfrac{\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_c} \sigma\varepsilon\, d\varepsilon - \dfrac{\varepsilon_c + \varepsilon}{2}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_c} \sigma\, d\varepsilon}{\frac{1}{6}(\varepsilon_c - \varepsilon)^2} \end{array}\right\} \qquad (3\,\mathrm{c})$$

hvoraf Anvendelse af (1 c) og Integration giver:

a) $\underline{\sigma_P < \sigma < \sigma_C}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{nN}{F} &= \sigma_C - \frac{\sigma_C - \sigma}{\omega + 1} \\ \frac{nM}{W} &= \frac{3\omega}{\omega + 2} \cdot \frac{\sigma_C - \sigma}{\omega + 1} \end{aligned}\right\} \tag{3 d}$$

eller

$$\left.\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{nN}{F} + \frac{\sigma_C}{\sigma_B} \cdot \frac{nM}{W} \\ \sigma &= \frac{nN}{F} - \omega \cdot \frac{\sigma_C}{\sigma_B} \cdot \frac{nM}{W} \end{aligned}\right\} \tag{4 a}$$

idet man definerer[1]) σ_B ved:

$$\frac{3\omega}{\omega + 2} = \frac{\sigma_B}{\sigma_C} = \frac{r_b}{r_c} \tag{5 a}$$

eller sætter

$$\omega = \frac{2\sigma_B}{3\sigma_C - \sigma_B} = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_p} \cdot \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_p}{\sigma_C - \sigma_P} = \frac{E_P}{E_{CP}} \tag{5 b}$$

og man ser da, at det velkendte Normudtryk:

i hvert Fald gælder for

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\frac{r_b}{r_c} \cdot \frac{N}{F} + \frac{M}{W} \leqq r_b} \\ &\underline{\frac{r_b}{r_c} \cdot \frac{N}{F} - \omega \cdot \frac{M}{W} \leqq \eta r_b.} \end{aligned}\right\} \tag{4 b}$$

Deformationerne bestemmes ved Brud af (1 d) og (4 a), idet:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon}{h} = \frac{\omega(\sigma_C - \sigma)}{Eh} = \frac{(\omega + 1)(\omega + 2)}{6} \cdot \frac{nM}{EI} = \frac{nM}{E_B \cdot I}$$

hvoraf

$$E_B = \frac{6\omega}{(\omega + 1)(\omega + 2)} \cdot \frac{E}{\omega} = \psi_B \cdot \frac{\sigma_C - \sigma}{\varepsilon_c - \varepsilon} \tag{1 f}$$

medens man, naar samme Last er centralt anbragt, af (1 d) og (3 d) har:

---

[1]) Man kan let vælge σ_P saaledes, at σ_B bliver lig Bjælkestyrken, og alligevel faa Arbejdslinien til at svare udmærket til den valgte Kurve.

$$\left.\begin{aligned} E_A &= E_P\left(\frac{\sigma_C-\sigma_A}{\sigma_C-\sigma_P}\right)^{\frac{\omega-1}{\omega}} = E_P\left(\frac{\sigma_C-\sigma}{\sigma_C-\sigma_P}\right)^{\frac{\omega-1}{\omega}}\left(\frac{1}{\omega+1}\right)^{\frac{\omega-1}{\omega}} \\ &= \left(\frac{1}{\omega+1}\right)^{\frac{\omega-1}{\omega}}\cdot E = \omega\cdot\left(\frac{1}{\omega+1}\right)^{\frac{\omega-1}{\omega}}\cdot\frac{\sigma_C-\sigma}{\varepsilon_c-\varepsilon} = \psi_A\cdot\frac{\sigma_C-\sigma}{\varepsilon_c-\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (1\,g)$$

hvori ψ_B og ψ_A, der kun er afhængige af Arbejdsliniens Brydningsforhold, antager de i nedenstaaende Tabel anførte Værdier.

b) $\underline{0 < \sigma < \sigma_P}$

I dette Tilfælde skal (4 b) erstattes med et mere indviklet Udtryk, der for $\sigma = \sigma_P$ falder sammen med (4 b) og for $\sigma = 0$ antager Værdien[1]):

$$\frac{r_b}{r_c}\cdot\frac{N}{F}+\frac{M}{W} = r_b\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c}\right)^2\cdot\frac{\eta-\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c}}{1-\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c}}\right] = \chi\cdot r_b \backsim r_b$$

idet Fejlen i H. t. nedenstaaende Tabel er under 1 %, hvorfor Udtrykket[2]):

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\frac{r_b}{r_c}\cdot\frac{N}{F}+\frac{M}{W}\leqq r_b} \\ &\text{i hvert Fald er tilstrækkelig nøjagtigt for} \\ &\underline{\frac{r_b}{r_c}\cdot\frac{N}{F}-\omega\cdot\frac{M}{W}\geqq 0.} \end{aligned}\right\} \quad (4\,c)$$

Anvender man, for $0 < \sigma < \sigma_P$, Ligningen for Arbejdsliniens krumme Del i Stedet for Tangenten i σ_P, finder man[3]) for $\sigma = 0$:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_c\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c}\right)\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right] \backsim 0$$

idet Fejlen i H. t. nedenstaaende Tabel er under 5 % af ε_c, saa man kan bestemme Deformationerne ved E, bestemt af (1 f) og (1 g), naar blot σ bestemmes af (4 a).

---

[1]) Den lange og besværlige Udregning forbigaas her.

[2]) Medens baade Husbygnings- og Jærnbetonnormer har første Ligning i (4 c), mangler anden Ligning enten helt eller er erstattet af vage Tilnærmelser.

[3]) Den simple Udregning forbigaas her.

	$\frac{r_b}{r_c}$	ω	ψ_B	ψ_A	η	$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c}$	$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}$	χ
Støbejærn	—[1]	—	—	—	0	0	$0.000 = 0$	$1 = 1$
Jærnbeton	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{7}$	1.03	1.09	0	0	$0.000 = 0$	$1 = 1$
Naaletræ	$\frac{3}{2}$	2	1.00	1.15	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$0.020 \backsim 0$	$\frac{449}{450} \backsim 1$
Løvtræ	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{5}$	1.03	1.12	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{21}$	$0.015 \backsim 0$	$\frac{10749}{10784} \backsim 1$
Staal 37	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{7}$	1.03	1.09	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{17}$	$0.042 \backsim 0$	$\frac{5731}{5780} \backsim 1$
Staal 44	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{7}$	1.03	1.09	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{17}$	$0.042 \backsim 0$	$\frac{5731}{5780} \backsim 1$
Murværk	1	1	1.00	1.00	1	1	$0.000 = 0$	$1 = 1$
Grovbeton	1	1	1.00	1.00	1	1	$0.000 = 0$	$1 = 1$

c) $\underline{\sigma < 0.}$

For Materialer med Trækstyrke kan man her roligt benytte Udtrykket:

$$\underline{\frac{r_b}{r_c} \cdot \frac{N}{F} + \frac{M}{W} \leq r_b} \tag{4 d}$$

der, naar N nærmer sig Nul, konvergerer mod den almindelige Bøjnings=formel, og samtidig bliver det mindre og mindre væsentligt, om man be=nytter:

$$E = E_P \tag{1 h}$$

eller en nøjagtigere Værdi til Bestemmelse af Deformationerne.

Udbøjningslinien.

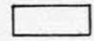
En Søjle med Kærneradius k vil, hvis den paavirkes af et Maksimal=moment $nM = nNe$, faa en Udbøjning f bestemt af:

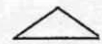
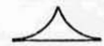
$$\left.\begin{aligned} f = \frac{(1-\alpha)}{10} \cdot \frac{nMl^2}{E_S \cdot I} &= 4(1-\alpha) \frac{nr_c}{4\pi^2 E_P} \cdot \frac{F^2}{I} \cdot \frac{l^2}{F} \cdot \frac{Ne}{F \cdot r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S} \\ &= 4(1-\alpha)\mu \cdot \frac{\sigma_a}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S} \cdot e \end{aligned}\right\} \tag{6 a}$$

hvori:

[1]) Normværdien af r_b, der er bestemt af Trækstyrken, er her ubrugelig.

$$\alpha = \begin{cases} -\frac{1}{4} \text{ hvis Momentfladen er rektangulær} \\ -\frac{1}{24} \quad — \qquad — \qquad „ \text{ parabolsk} \\ +\frac{1}{6} \quad — \qquad — \qquad „ \text{ trekantet} \\ +\frac{3}{8} \quad — \qquad — \qquad „ \text{ parabeltrekantet} \end{cases}$$



og efter (1 f) og (1 g)

$$E_P \geqq E_A \geqq E_S \geqq E_B$$

idet:

$$\frac{E_P}{E_S} = \frac{E_P}{E_A} \cdot \frac{E_A}{E_S} = \frac{\psi_A}{\psi_S} \cdot \frac{E_P}{E_A} = \psi \left(\frac{r_c (1-\eta)}{r_c - \sigma_a} \right)^{\frac{\omega - 1}{\omega}} \tag{7 a}$$

hvori

$$\psi_A \geqq \psi_S \geqq \psi_B .$$

Central Søjlepaavirkning.

En tilfældig Excentricitet e_S giver en Udbøjning ved Brud paa:

$$\left. \begin{aligned} f_S &= 5\mu \cdot \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S} \cdot e_S + 4\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S} \cdot f_S \\ &= e_S \cdot \frac{5\mu \cdot \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}}{1 - 4\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}} \end{aligned} \right\} \tag{6 b}$$

eller

$$\left. e_S + f_S = e_S \frac{1 + \mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}}{1 - 4\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}} \right\} \tag{6 c}$$

der bliver uendelig for

$$r_{\text{Euler}} = \frac{r_c}{4\mu} \cdot \frac{E_S}{E_P} \tag{2 b}$$

men da:

$$\frac{r_b}{r_c} \cdot \frac{N}{F} + \frac{N(e_S + f_S)}{F \cdot k} = r_b = \frac{r_b}{r_E} \cdot \frac{N}{F} \tag{4 e}$$

har man ogsaa:

$$e_S + f_S = k\left(\frac{r_b}{r_E} - \frac{r_b}{r_c}\right). \tag{6 d}$$

Excentrisk Søjlepaavirkning.

Belastes ovennævnte Søjle med en mindre Normalkraft, bliver:

$$\left. e'_S = e_S = k\left(\frac{r_b}{r_E} - \frac{r_b}{r_c}\right) - e_S \frac{5\,\mu \cdot \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}}{1 - 4\,\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}} \right\} \tag{6 e}$$

og

$$\left. \begin{aligned} e'_S + f'_S &= k\left(\frac{r_b}{r_E} - \frac{r_b}{r_c}\right) - e_S \frac{5\,\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}}{1 - 4\,\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}} + e_S \frac{5\,\mu \frac{\sigma_a}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E'_S}}{1 - 4\,\mu \cdot \frac{\sigma_a}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E'_S}} \\ &= k\left(\frac{r_b}{r_E} - \frac{r_b}{r_c}\right) - e_S \cdot \frac{5\,\mu \frac{E_P}{r_c}\left(\frac{r_E}{E_S} - \frac{\sigma_a}{E'_S}\right)}{\left(1 - 4\,\mu \frac{r_E}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E_S}\right)\left(1 - 4\,\mu \frac{\sigma_a}{r_c} \frac{E_P}{E'_S}\right)} \end{aligned} \right\} \tag{6 f}$$

eller efter (7 a):

$$e'_S + f'_S \lessapprox k\left(\frac{r_b}{r_E} - \frac{r_b}{r_c}\right). \tag{6 g}$$

Virker Kraften yderligere paa Excentriciteten e giver (6 a), behandlet paa samme Maade som ved (6 b),

$$(e + f) = e \frac{1 - \alpha \cdot 4\,\mu \cdot \frac{\sigma_a}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E'_S}}{1 - 4\,\mu \cdot \frac{\sigma_a}{r_c} \cdot \frac{E_P}{E'_S}} = e \cdot \frac{\nu - \alpha}{\nu - 1} \tag{6 h}$$

idet

$$\nu = \frac{r_c}{4\,\mu\,\sigma_a} \cdot \frac{E'_S}{E_P} \gtrapprox \frac{r_{\text{Euler}}}{\sigma_a} \tag{8}$$

saa

$$\frac{r_b}{r_c} \cdot \frac{N}{F} + \frac{N(e'_S + f'_S + e + f)}{Fk} = r_b$$

eller:

$$\frac{r_b}{r_E} \cdot \frac{N}{F} + \frac{\nu - \alpha}{\nu - 1} \frac{M}{W} \leq r_b \tag{4f}$$

bliver den almengyldige Formel[1]) for alle excentrisk paavirkede Søjler og for Bjælker, der er paavirkede som Søjler.

Resumé.

Spændingsbestemmelse i Konstruktioner, der er paavirkede til Bøjning og Normaltryk samtidig, foretages lettest paa følgende Maade:

Eftersom Stivhedsfaktoren

$$\mu = \frac{\varkappa \zeta l^2}{F} = \varkappa \left(\frac{l}{i}\right)^2$$

er mindre eller større end $\frac{1}{4\eta}$, bestemmes r_E af (2 a) som

$$r_{\text{Engesser}} \quad \text{eller} \quad r_{\text{Euler}},$$

og Normalspændingen

$$\sigma_a = \frac{N}{F}$$

omsættes til en tænkt Bøjningsspænding

$$\frac{r_b}{r_E} \cdot \frac{N}{F}.$$

I begge Tilfælde bestemmes Udnyttelsesfaktoren

$$\nu = \frac{r_{\text{Euler}}}{\sigma_a},$$

og Bøjningsspændingen

$$\sigma_b = \frac{M}{W}$$

omsættes til en tænkt Bøjningsspænding[2])

---

[1]) Anført i *K. F. W. Askøe*: Planelastiske Tabeller, Aarhus 1936 og gennemprøvet paa Prof. Ostenfelds Søjleforsøg, hvilket skal vises i en senere Artikel.

[2]) Konstanten α, der som ovenfor nævnt, varierer med Momentfladens Form, er ved excentrisk paavirkede Søjler praktisk talt lig Nul.

$$\frac{\nu-\alpha}{\nu-1}\,\frac{M}{W},$$

hvorefter begge tænkte Bøjningsspændinger adderes:

$$\underline{\frac{r_b}{r_E}\cdot\frac{N}{F}+\frac{\nu-\alpha}{\nu-1}\cdot\frac{M}{W}\leq r_b.}\ ^{1)}$$

---

1) Angaaende Taleksempler se »Ingeniøren« Nr. 9, 1939.